

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记11——微分和不定积分

微分在数学中的定义：由函数 $y=f(x)$ ，得到 A 、 B 两个数集，在 A 中当 Δx 靠近自己时，函数在 Δx 处的极限叫作函数在 Δx 处的微分，微分的中心思想是无穷分割。积分是微积分学与数学分析里的一个核心概念。通常分为定积分和不定积分两种。直观地说，对于一个给定的正实值函数，在一个实数区间上的定积分可以理解为在坐标平面上，由曲线、直线以及轴围成的曲边梯形的面积值（一种确定的实数值）。

微分

什么是微分

如果对于函数 $y=f(x)$ ，存在 $dy=f'(x)dx$ ，称 dy 是 y 的微分或 $f(x)$ 的微分。

如果换一种写法：

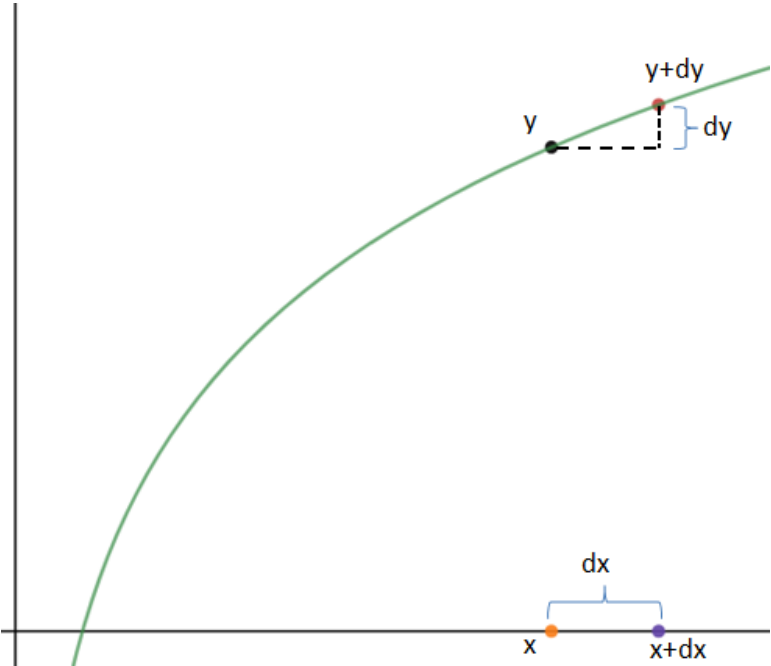
$$dy = f'(x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

这实际上就是莱布尼茨对于导数的记法，它和导数表达了同一个意思。

重新审视导数的含义，其公式：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示的是两个无穷小量的比， dy 和 dx 就是这两个无穷小量：



随笔分类 (211) ★★资源下载★★(1) Java并发编程(1) 程序员的数学(24) 单变量微积分(31) 多变量微积分(24) 概率(24) 机器学习(27) 软件设计(1) 数据分析(6) 数据结构与算法(27) 随笔(5) 线性代数(34) 项目管理(2) 转载(4) 随笔档案 (205) 2021年2月(1) 2020年3月(2) 2020年2月(6) 2020年1月(4) 2019年12月(7) 2019年11月(15) 2019年9月(3) 2019年8月(6) 2019年7月(1) 2019年6月(8) 2019年5月(3) 2019年4月(5) 2019年3月(7) 2019年2月(3) 2019年1月(7) 更多 阅读排行榜 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772) 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430) 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099) 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772) 评论排行榜 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5) 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4) 推荐排行榜 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7) 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5) 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5) 最新评论 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积) 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90° --猫猫猫猫猫大人
--

单变量微积分笔记11——微分和不定积分 - 我是8位的 - 博客园 过去我们把dy和dx叫做Δy和Δx, 实际上它们不是一回事, Δx是一个实实在在的数量, dx是一个概念, 是Δx→0的函数表达式, 可以把dx看作一个符号, 就是微分符号。 用微分求解近似值 示例: $64.1^{1/3} \approx ?$ 设$y = x^{1/3}$, 当$x = 64$时, $y = 4$, $x + dx = 64.1$, $dx = 0.1$, 代入微分公式: $dy \approx y' dx = (x^{1/3})' dx = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} 64^{-\frac{2}{3}} \times 0.1 \approx 0.002$ $64.1^{1/3} \approx y + dy \approx 4 + 0.002 = 4.002$ 微分法与线性近似的对比 示例也可以用线性近似法求解。设$f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 64$ 根据线性近似公式: $f(x) \approx f'(x)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}(x - x_0) + f(x_0)$ $f(64.1) \approx \frac{1}{3} 64^{-\frac{2}{3}} \times (64.1 - 64) + f(64) \approx 0.002 + 4 = 4.002$ 两种方法的结果相同。结合线性近似公式和微分公式: $f(x) \approx f'(x)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x)dx + f(x_0) = dy + f(x_0)$ 实际上线性近似是微分的一种应用。 示例 示例1, $d(7x^9 + 34 - 5u^{-3}) = ?$ 根据导数的加法法则, $d(7x^9 + 34 - 5u^{-3}) = d(7x^9) + d(34) - d(5u^{-3}) = 7 \times 9x^8 dx + 0 - 5 \times (-3)u^{-4} du = 63x^8 dx + 15u^{-4} du$ 示例2, $d(\sin\theta\cos\theta) = ?$ 根据导数的乘法法则, $d(\sin\theta\cos\theta) = (d\sin\theta)\cos\theta + \sin\theta d\cos\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta$ 示例3, $\sqrt{21} \approx ?$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

基础公式是 $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$

由基础公式得知， $x=2$ 时， $y=f(x)=4$ ； $x=3$ 时， $y=f(x)=21^{1/2}$

设 $x=2$ ， $dx=1$ ； $y=4$

$$y' = \left((10x - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (10x - x^2)(10 - 2x)$$

$$dy = y' dx = \frac{1}{2} (10 \times 2 - 2^2)(10 - 2 \times 2) \times 1 = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{21} \approx y + dy = 4 + \frac{3}{4} = 4.75$$

不定积分

什么是不定积分

$$G(x) = \int g(x) dx$$

上面的式子就是不定积分表达式，称作 $g(x)dx$ 的不定积分，其中 $G(x)$ 的导数是 $g(x)$ ，即 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的反导数。 $g(x)$ 的反导数又叫做 g 的不定积分， $\int$ 就是积分符号。

示例1， $\int \sin x dx$

求解 $\sin x dx$ 的不定积分，实际上是求解谁的导数是 $\sin x$ 。如果 $G(x) = -\cos x$ ，则 $G'(x) = \sin x$ ，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ，其中 C 是一个常数，之所以叫不定积分，就是因为有了这个常数。 $\int \sin x dx$ 是不定的，因为我们并没有给出一个确定的函数。

示例2， $\int x^a dx$

$$\frac{dx^{a+1}}{dx} = (a+1)x^a$$

$$dx^{a+1} = (a+1)x^a dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

示例3， $\int dx/x$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

不定积分的唯一性

不定积分的唯一性：如果 $f'(x) = g'(x)$ ，则 $f(x) = g(x) + c$

以下给出证明：

设 $F=f(x)$ ， $G=g(x)$ ，如果 $f'(x)=g'(x)$ ，则 $(F-G)' = F' - G' = 0$

常数的导数是0，所以 $F-G$ 是一个常数，即 $f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ ，证毕。

唯一性也是不定积分成立的基础。

求解不定积分

不定积分的求解远比求导困难的多，很多时候甚至发现根本无法求解，这里仅记录两种最常用的求解方法：换元法和猜测法。

换元法

示例1, $\int x^3(x^4+2)^5 dx$

这个不能一眼看出答案了，使用一种称为换元法的方法求解。

设 $u = x^4 + 2$ ，则 $du = 4x^3 dx$

$$\begin{aligned}\int x^3(x^4+2)^5 dx &= \int (x^4+2)^5 x^3 dx \\ &= \int u^5 \frac{du}{4} = \frac{u^6}{6} \times \frac{1}{4} + C \\ &= \frac{(x^4+2)^6}{24} + C\end{aligned}$$

示例2, $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

设 $u = 1 + x^2$ ，则 $du^{\frac{1}{2}} = 2x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = du^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

示例3, $\int \frac{dx}{x \ln x}$

设 $u = \ln x$ ，则 $du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} = \int du \cdot \frac{1}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

猜测法

做过大量练习后就可以使用猜测法直接猜测不定积分的结果，这应该成为首先尝试的求解方法。

示例1, $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

这个例子在换元法中出现过，现在使用猜测法求解。

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

猜测其结果可能与 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 有关,

$$d\sqrt{1+x^2} = d(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C$$

示例2, $\int e^{6x} dx$

$$\text{猜测 } e^{6x} \Rightarrow de^{6x} = 6e^{6x} dx \Rightarrow \int e^{6x} dx = \frac{e^{6x}}{6} + C$$

示例3 $\int xe^{-x^2} dx$

$$\text{猜测 } e^{-x^2} \Rightarrow de^{-x^2} = -2xe^{-x^2} dx \Rightarrow \int xe^{-x^2} dx = \frac{-e^{-x^2}}{2} + C$$

示例4, $\int \sin x \cos x dx$

$$\text{猜测 } \sin^2 x \Rightarrow d\sin^2 x = 2\sin x \cos x dx \Rightarrow \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x / 2 + C_1$$

$$\int \sin x \cos x dx \text{ 的另一个答案是 } -\cos^2 x / 2 + C_2$$

如果将两个答案相减, 得到 $(\sin^2 x + \cos^2 x) / 2 + (C_1 - C_2) = 1/2 + (C_1 - C_2) = C$, 两个函数的相减的结果是一个常数, 即这两个函数是同族函数。

综合示例

示例1, $d(7x^9 + 34 - 5u^{-3}) = ?$

根据导数的加法法则,

$$d(7x^9 + 34 - 5u^{-3}) = d(7x^9) + d(34) - d(5u^{-3}) = 7 \times 9x^8 dx + 0 - 5 \times (-3)u^{-4} du = 63x^8 dx + 15u^{-4} du$$

示例2, $d(\sin \theta \cos \theta) = ?$

根据导数的乘法法则,

$$d(\sin \theta \cos \theta) = (d\sin \theta) \cos \theta + \sin \theta d\cos \theta = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta$$

示例3, $\sqrt{21} \approx ?$

基础公式是 $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$

由基础公式得知, $x=2$ 时, $y=f(x)=4$; $x=3$ 时, $y=f(x)=21^{-1/2}$

设 $x=2$, $dx=1$; $y=4$

$$y' = \left((10x - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (10x - x^2)(10 - 2x)$$

$$dy = y' dx = \frac{1}{2} (10 \times 2 - 2^2)(10 - 2 \times 2) \times 1 = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{21} \approx y + dy = 4 + \frac{3}{4} = 4.75$$

示例4, $\int \frac{x^8 + 2x^3 - x^{2/3} - 3}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^8 + 2x^3 - x^{2/3} - 3}{x^2} dx &= \int (x^6 + 2x - x^{-4/3} - 3x^{-2}) dx \\ &= \int x^6 dx + \int 2x dx - \int x^{-4/3} dx - \int 3x^{-2} dx \\ &= \frac{x^7}{7} + x^2 + 3x^{-1/3} + 3x^{-1} + C \end{aligned}$$

示例5, $\int e^{2x} \cos(1 - e^{2x}) dx$

使用换元法, 令 $u = (1 - e^{2x})$, $du = -2 e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos(1 - e^{2x}) dx &= \int \cos(1 - e^{2x}) e^{2x} dx = \int u (-1/2) du = -\sin u / 2 + C \\ &= -\sin(1 - e^{2x}) / 2 + C \end{aligned}$$

示例6, $\int 4x(5x^2 - 1)^{1/3} dx$

这个又要靠猜测法了, 猜的 $(5x^2 - 1)^{1/3}$ 的反导数。

$d(5x^2 - 1)^{4/3} = (4/3) (5x^2 - 1)^{1/3} (10x) dx = (40/3) x (5x^2 - 1)^{1/3} dx$, 与目标很相似

$$\int 4x(5x^2 - 1)^{1/3} dx = (3/10)(5x^2 - 1)^{4/3} + C$$

示例7, $\int \tan x dx$

$$\int \tan x dx = \int (\sin x / \cos x) dx$$

使用换元法, 令 $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$

$$\int (\sin x / \cos x) dx = \int -du / u = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

积分表

以下是25个基本不定积分公式:

$$1、 \int k dx = kx + c$$

$$2、 \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

$$3、 \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$4、 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$5、 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$6、 \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7、 \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$8、 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$9、 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$10、 \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$11、 \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$12、 \int e^x dx = e^x + c$$

$$13、 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$14、 \int shx dx = chx + c \quad \text{其中 } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 为双曲正弦函数}$$

$$15、 \int chx dx = shx + c \quad \text{其中 } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ 为双曲余弦函数}$$

$$16、\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$17、\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$18、\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$19、\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c = \ln \tan \frac{x}{2} + c$$

$$20、\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$21、\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$22、\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$23、\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$24、\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

$$25、\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

总结

1.微分表达式: $dy = f'(x)dx$

2.不定积分表达式: $G(x) = \int g(x)dx$

3.不定积分的唯一性: 如果 $f'(x) = g'(x)$, 则 $f(x) = g(x) + c$

4.用换元法和猜测法求解不定积分

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [微分](#), [不定积分](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

0
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [单变量微积分笔记10——拉格朗日中值定理](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记12——常微分方程和分离变量](#)

posted on 2017-10-10 22:26 我是8位的 阅读(4277) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

kuaidaili.com

IP被封? 一键
切换IP/按小时
计费

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes